Ciências ULisboa

3. Domínio das frequências

Sinal e série amostral. Transformada de Fourier. Espectro de frequências. Filtragem no espaço de Fourier. Teorema da convolução. Exemplos de aplicação.

Fernando Soares

Sinal e série amostral

Uma onda periódica elementar como o seno fica definida por uma das seguintes expressões (em função do período *T*, ou da frequência *f*):

$$P(t) = A \times \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right) + C$$

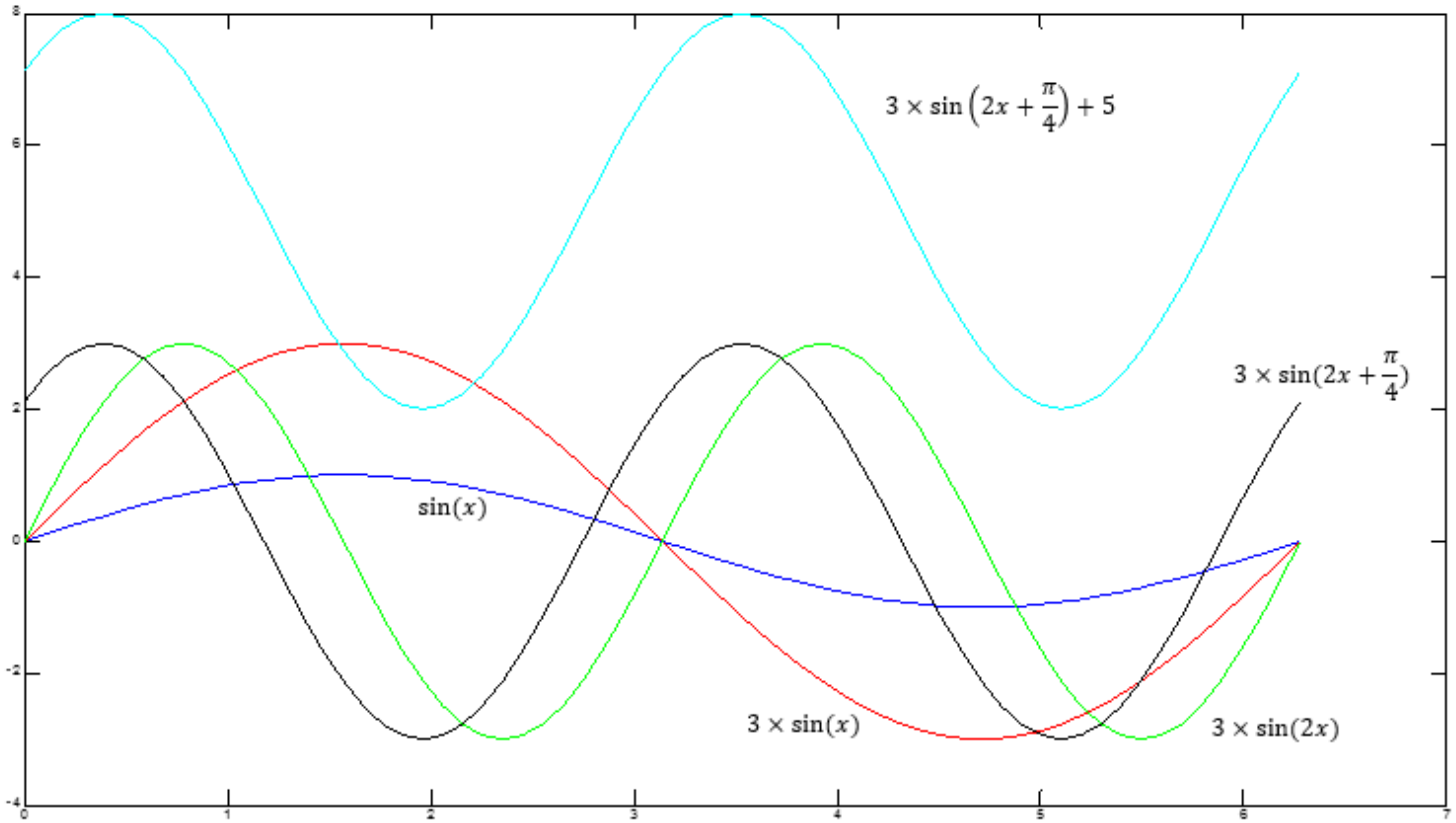
$$P(t) = A \times \sin(2\pi f t + \phi) + C$$

A: amplitude; f: frequência; T: período; ϕ: fase; C: translação

Fernando Soares

Sinal e série amostral

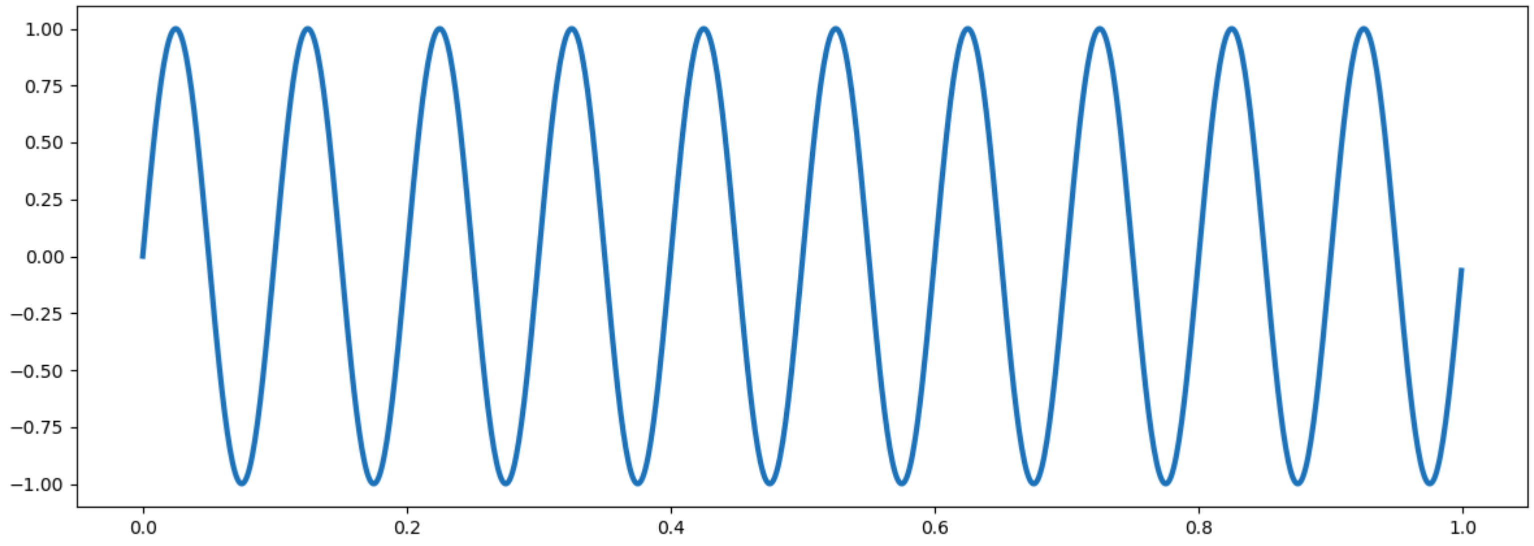
Exemplos de ondas periódicas $y = a\times \sin(\boldsymbol{\omega} x + \varphi) + d$ $\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\pi} f$



Fernando Soares

Sinal e série amostral

Num sinal periódico *P*, o valor da frequência *f* corresponde ao número de ciclos *m* que ocorre no intervalo temporal de um segundo (ou unidade de tempo) dado em *Hertz* (*Hz*).

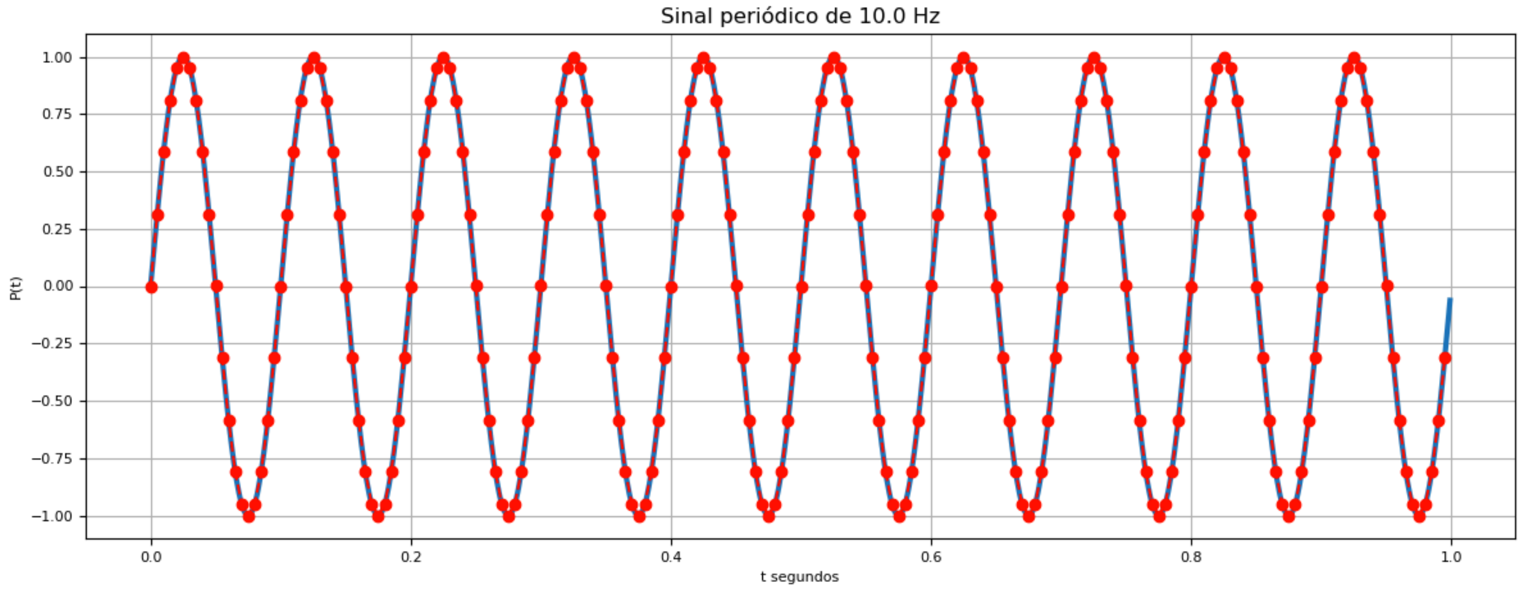


Sinal com frequência de 10 Hz

Fernando Soares

Sinal e série amostral

Num processo de digitalização de um sinal analógico, a amostragem de P consiste em gerar uma sequência discreta S de impulsos (série amostral) com uma frequência de amostragem f_s.



Sinal e série amostral

O teorema de amostragem de *Nyquist-Shannon* estabelece a condição que determina qual deve ser a menor frequência de amostragem que torna adequada a reconstrução do sinal:

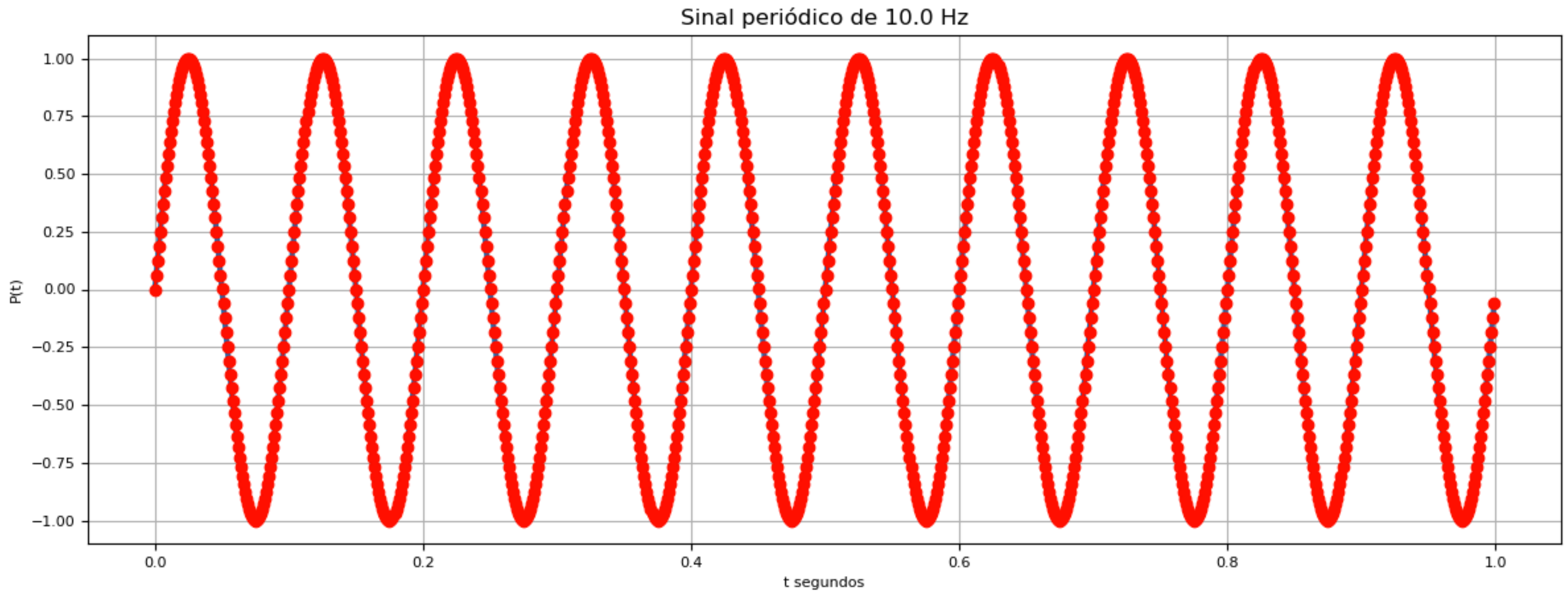
$$f_s > 2 \times f_{max}$$

Por outras palavras, a frequência de amostragem deve ser maior que duas vezes a máxima frequência do sinal.

Sinal e série amostral

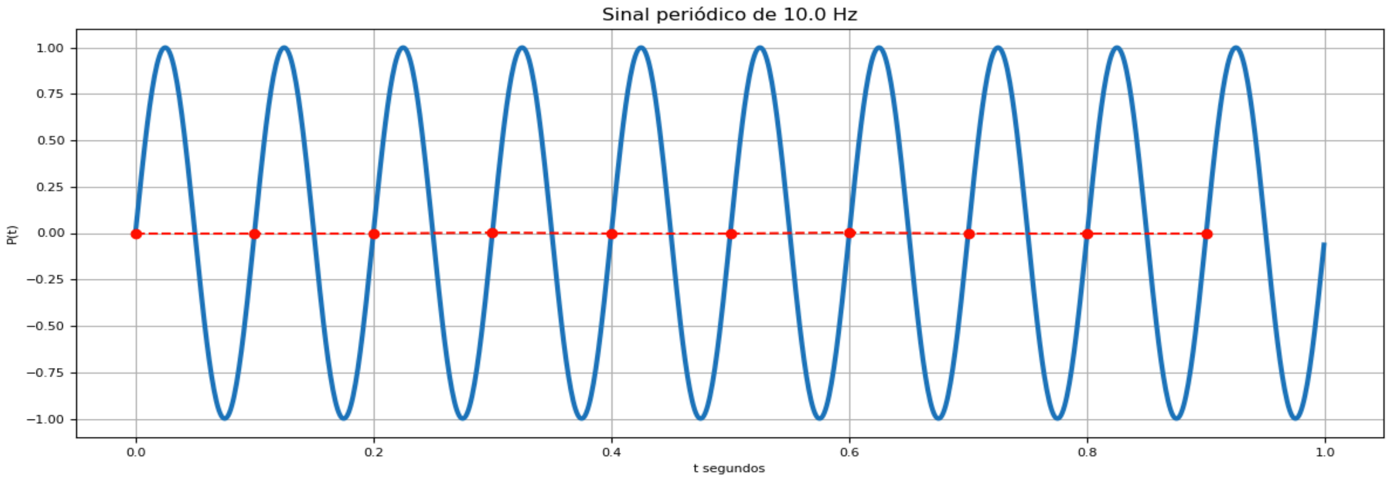
Nesta perspectiva, poder-se-á colocar a seguinte questão:

- Porquê não amostrar então o sinal com o maior valor possível para $f_{,}$ ou sempre um valor elevado?



Sinal e série amostral

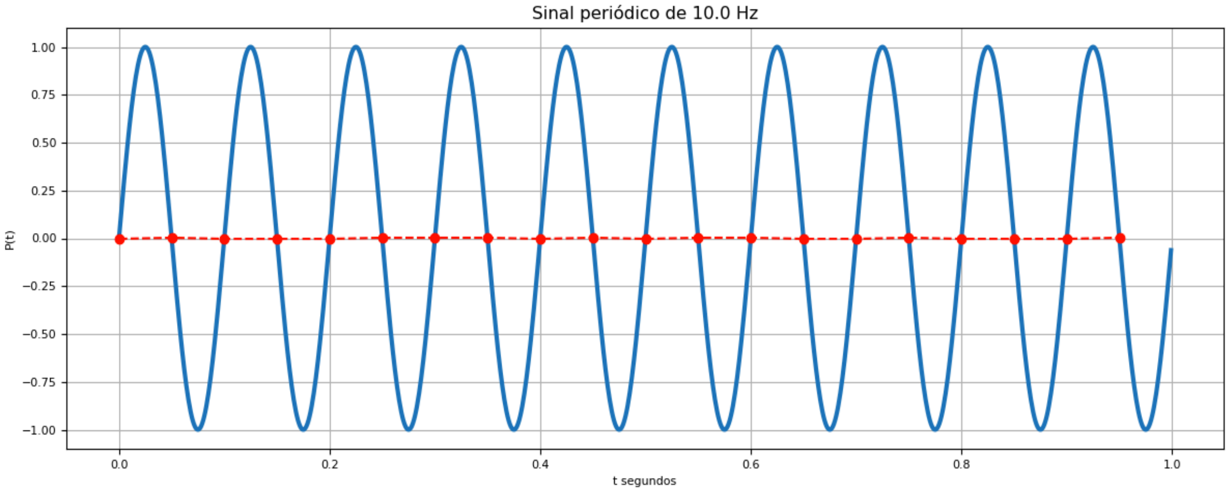
Considere-se, como exemplo, uma onda periódica P de um *seno* com f = 10 Hz, ou seja, um sinal com uma frequência de dez ciclos por segundo (simplificada com A = 1 e $\phi = C = 0$). Uma série com f_s = 10 Hz (que não respeita a condição referida anteriormente) tem uma amostra por período.



A ligação desses pontos resulta numa linha sem qualquer relação com a forma do sinal

Sinal e série amostral

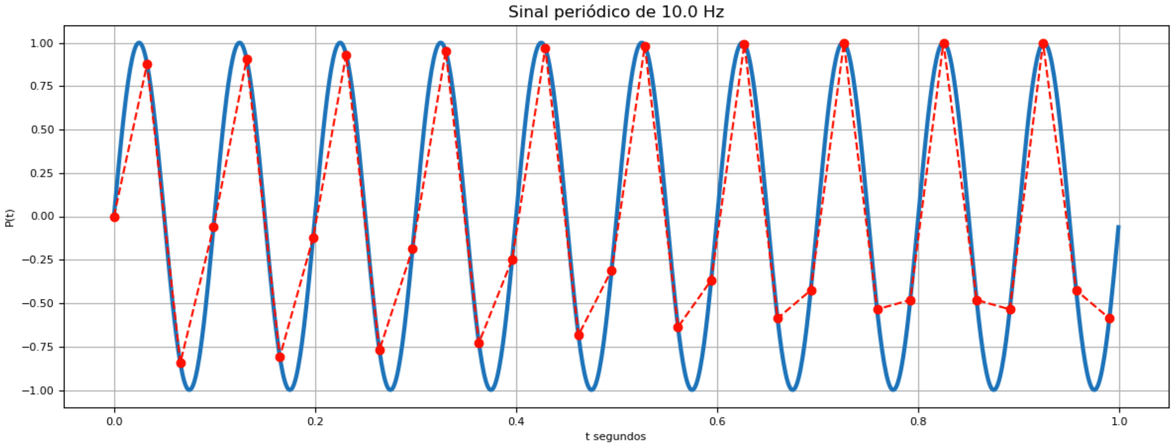
Veja-se agora uma série com f_s = 2×10 = 20 *Hz*, que está no limite da condição de *Nyquist* (mas ainda sem a respeitar); neste caso têm-se duas amostras por período que, conectadas, formam uma linha semelhante à anterior.



Ciências ULisboa

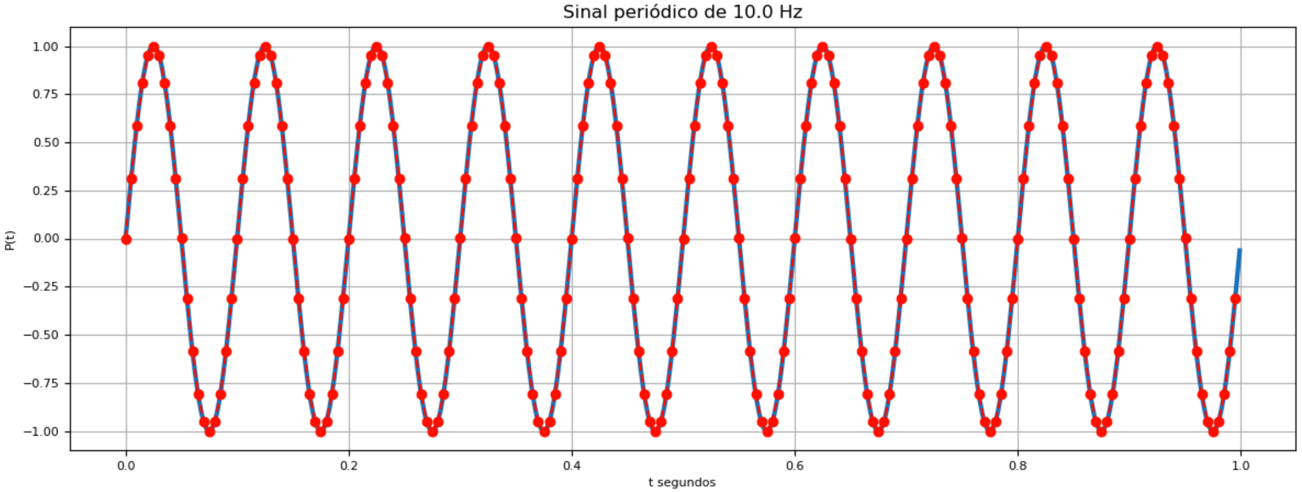
Sinal e série amostral

Aumentando-se a frequência de amostragem para um valor que respeite a condição, por exemplo, $f_s = 3 \times 10 = 30\ Hz$, pode-se verificar que a série adquire um comportamento que possibilita já reconstituir o sinal de uma forma clara, podendo ser quase suficiente para os objetivos a cumprir.



Sinal e série amostral

Com um valor superior de, por exemplo, $f_s = 20 \times 10 = 200\ Hz$, tem-se uma série amostrada já bastante fiel ao sinal original.



Fernando Soares

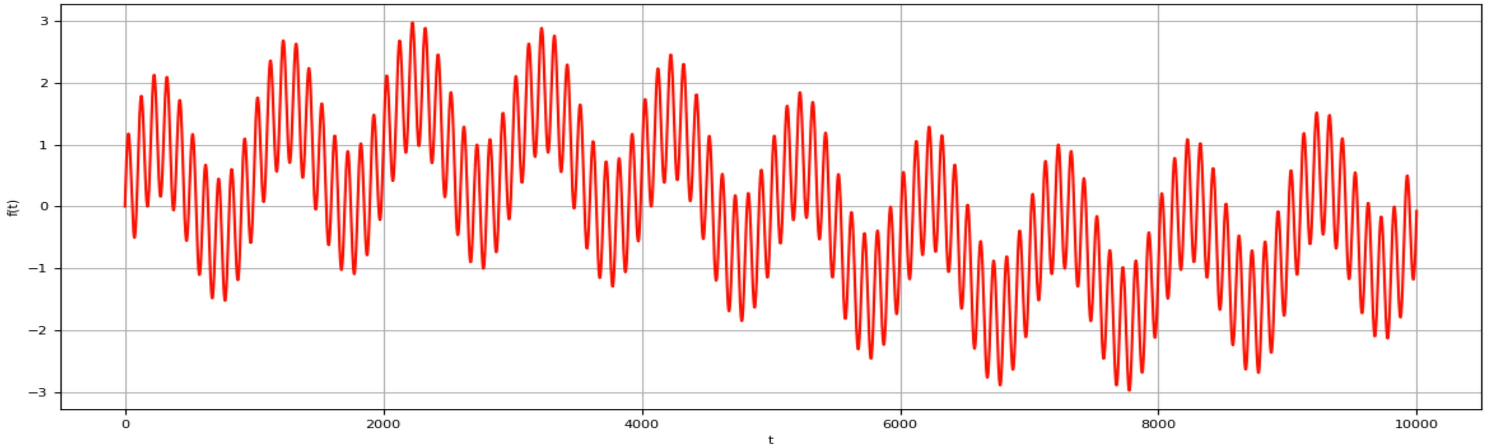
Sinal e série amostral

Assim sendo, para um tipo de sinal com uma largura de banda conhecida, é desnecessário amostrá-lo com frequências de amostragem acima das que permitem reconstituí-lo sem ambiguidade.

Fernando Soares

Sinal e série amostral

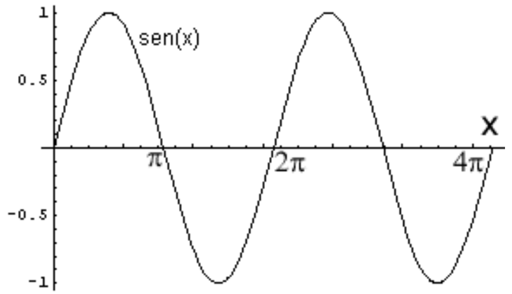
Considere-se um segundo exemplo sintético, produzido a partir da soma de três senoidais com diferentes frequências não conhecidas à partida e que, apesar de igualmente periódica, tem um comportamento mais difícil de interpretar. O objetivo será o de saber as características das ondas elementares. Para tal recorre-se à análise espectral com recurso à **transformada de Fourier**.

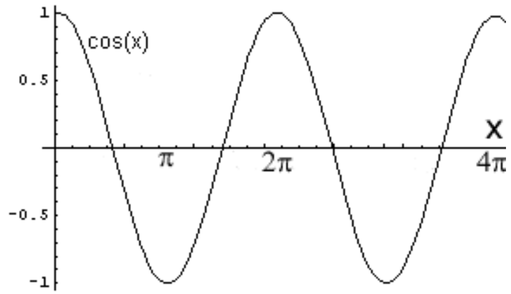


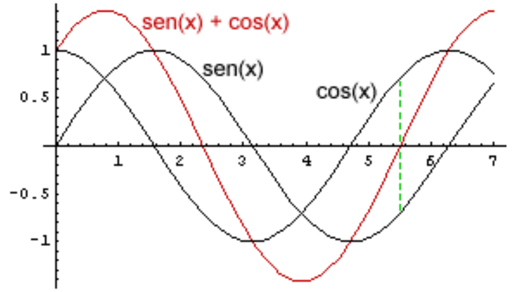
Transformada de Fourier

A teoria de *Fourier* afirma que qualquer sinal pode ser expresso como uma soma de várias senoidais, ou seja, uma soma de funções seno e cosseno.

$$f(x) = a_0 + a_1 \,\mathrm{sen}(x) + a_2 \,\mathrm{sen}(2x) + a_3 \,\mathrm{sen}(3x) + \ \ldots + b_1 \cos(x) + b_2 \cos(2x) + b_3 \cos(3x) + \ \ldots$$







A transformada de *Fourier* (TF) permite realizar a decomposição de um sinal (definido no domínio espacial) nas suas componentes seno e cosseno, representando-o no chamado “domínio das frequências”, ou espaço de *Fourier*.

Fernando Soares

Transformada de Fourier 1D

Transformada ***Directa***:

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1}\left[f(x)\times e^{-j\frac{2\pi ux}{N}}\right] = \sum_{x=0}^{N-1}\left[f(x)\times\left(cos\left(-\frac{2\pi ux}{N}\right)+j\ sin\left(-\frac{2\pi ux}{N}\right)\right)\right]$$

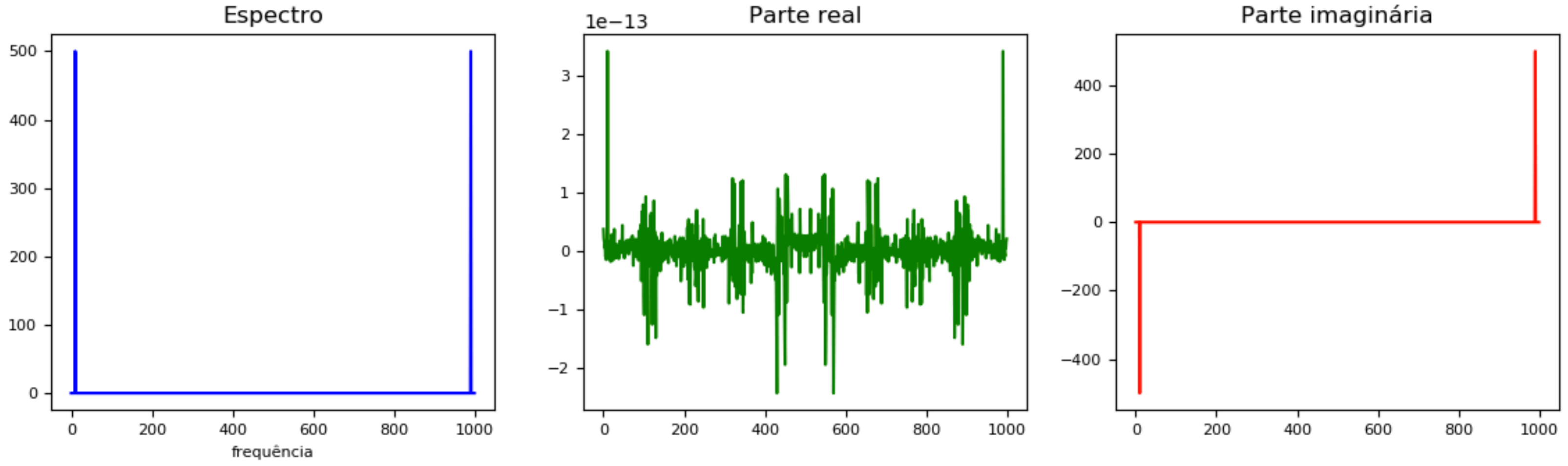
Transformada ***Inversa***:

$$f(x) = \frac{1}{N}\times\sum_{u=0}^{N-1}\left[F(u)\times e^{j\frac{2\pi ux}{N}}\right] = \frac{1}{N}\times\sum_{x=0}^{N-1}\left[f(x)\times\left(cos\left(\frac{2\pi ux}{N}\right)+j\ sin\left(\frac{2\pi ux}{N}\right)\right)\right]$$

N = número de amostras que se tem
x = amostra corrente (0…N-1)
f(x) = valor do sinal em x
u = frequência corrente (0 Hertz até N-1 Hertz)
F(u) = quantidade de frequência u presente no sinal

Transformada de Fourier 1D

O espectro de frequências de uma função resulta da aplicação da DFT. Os valores resultantes desta transformação pertencem ao domínio dos números complexos ($z = a+bj$), sendo constituídos por uma parte real (a) e uma parte imaginária (b). A magnitude do espectro é igual ao valor absoluto da DFT ($|z|$)

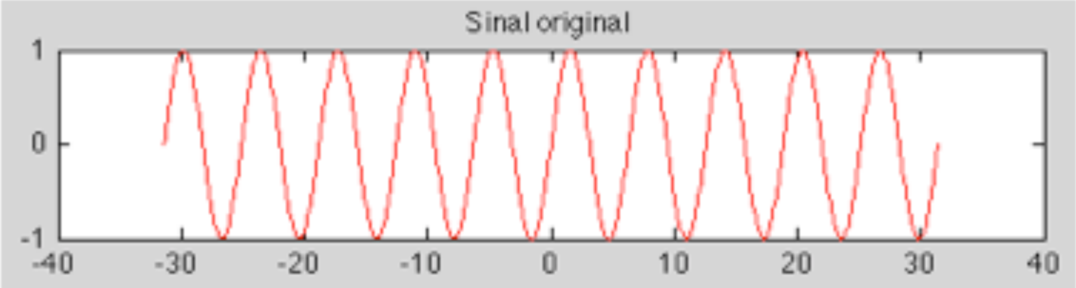


Magnitude

Fernando Soares

Espectro de frequências

Considere-se o seguinte sinal periódico (seno).

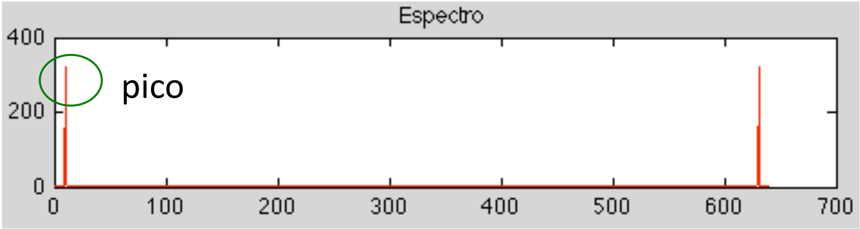


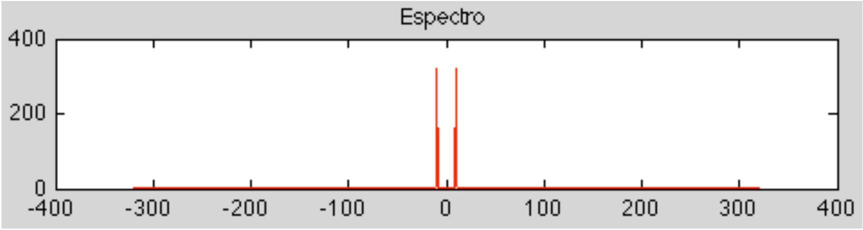
O **espectro** de um sinal contém as magnitudes das frequências das ondas que o constituem. Neste exemplo, como o sinal representa uma função sinusoidal (seno), há apenas uma frequência.

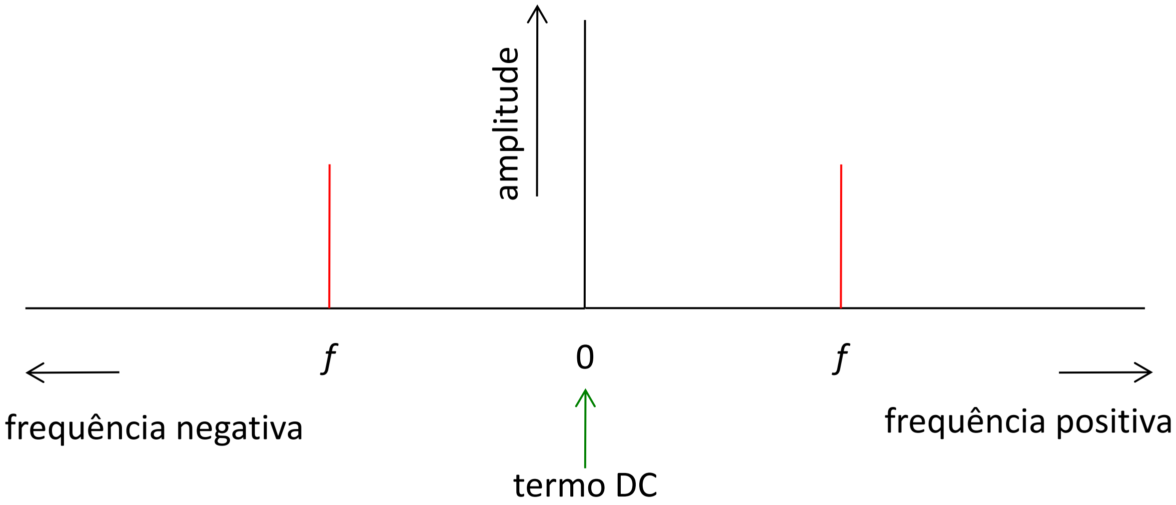
Fernando Soares

Espectro de frequências

O espectro tem duas partes: uma <u>parte negativa</u> e outra <u>parte positiva</u>. A parte negativa contém frequências negativas. Para sinais reais (sem parte imaginária), a parte negativa do espectro é sempre uma versão "espelhada" da parte positiva. Assim, neste exemplo, a parte positiva terá apenas um pico, e a parte negativa terá um pico idêntico ao da parte positiva.



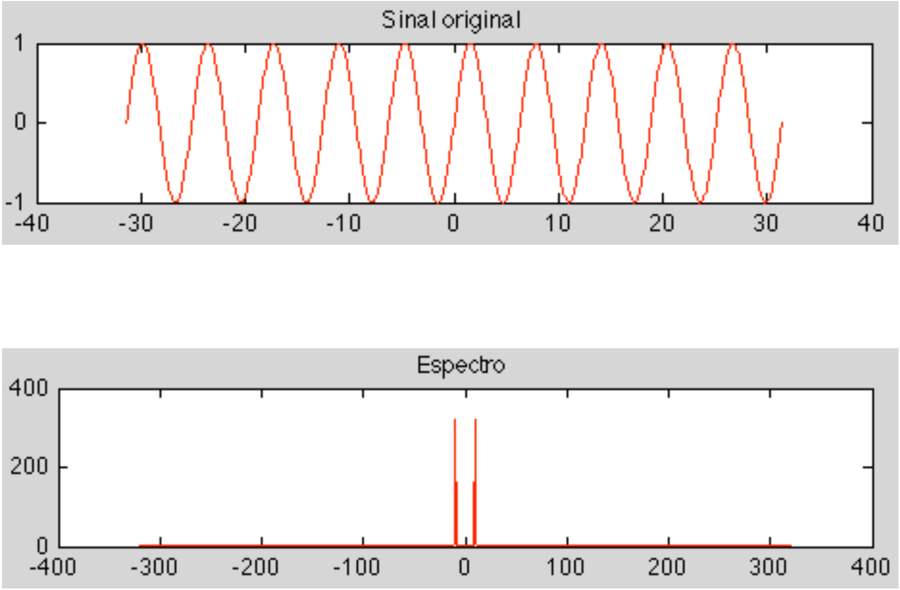




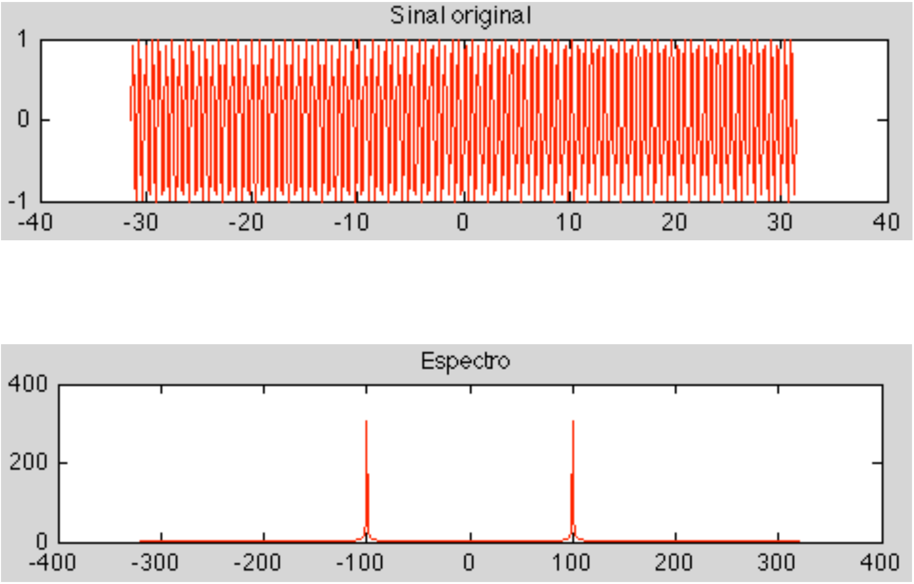
Espectro de frequências

Quanto mais afastado para a esquerda (e para a direita) estiver um pico, maior é a frequência que o mesmo representa. Por outras palavras, um pico bastante afastado para a direita (e esquerda) significa que o sinal contém uma componente periódica de alta frequência.

f



$10 \times f$

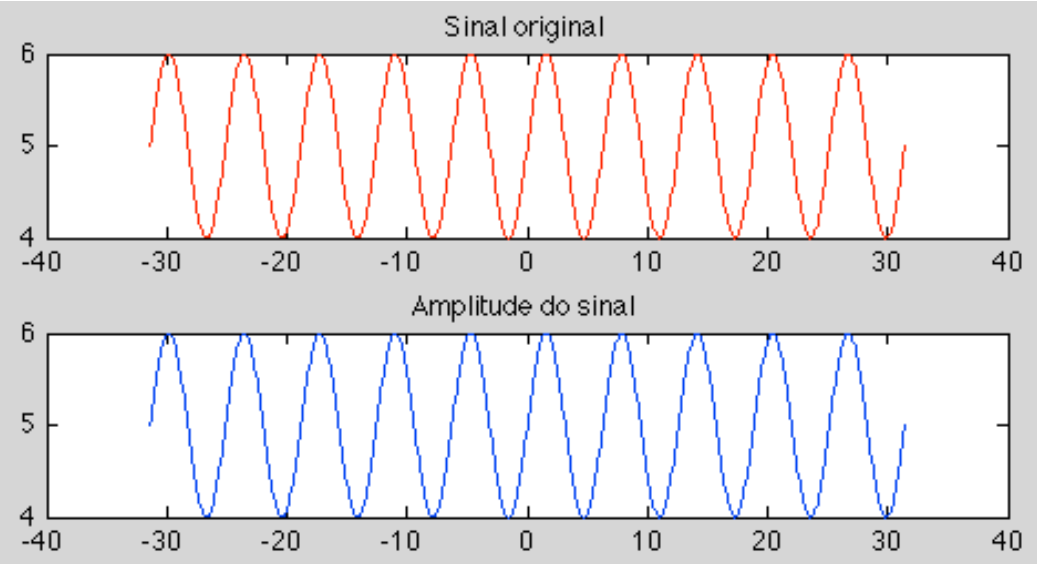


Fernando Soares

Espectro de frequências

Considere-se um segundo exemplo de uma curva sinusoidal adicionada de um valor C: $f(x) = \sin(x)+C$. A acção desta soma é a de transladar o sinal segundo a direcção yy. O valor médio do sinal é igual ao valor de C (pois o valor médio de $\sin(x) = 0$).

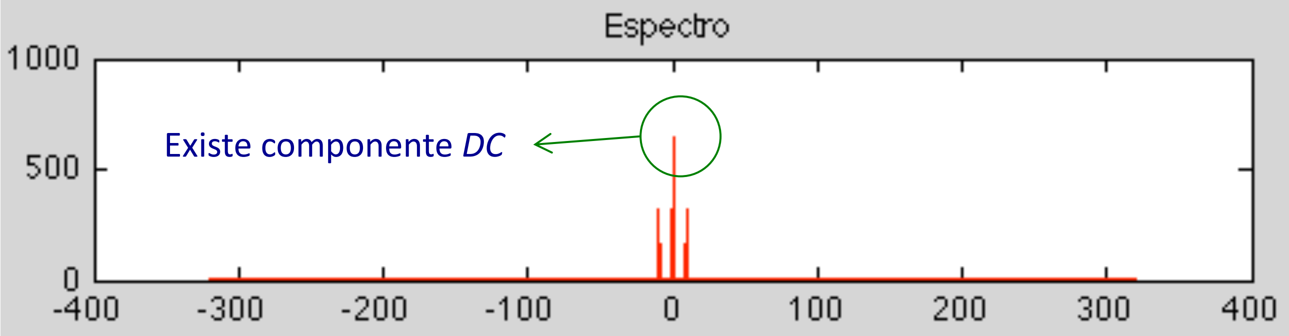
$C = 5$



Fernando Soares

Espectro de frequências

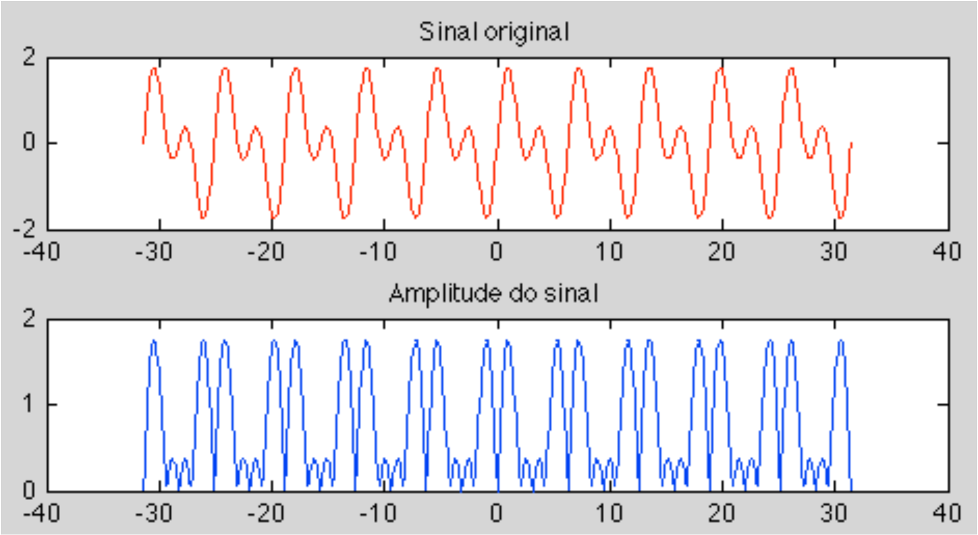
No espectro de frequências a frequência f=0 corresponde à componente DC. Esta componente tem uma amplitude igual ao valor médio do sinal. Quando um sinal tem um valor médio diferente de zero, para além dos picos de frequência das componentes sinoidais, a frequência zero do espectro (f = 0) tem um pico adicional que se designa por componente DC e que tem uma amplitude igual ao valor médio do sinal. Assim, se o espectro de um sinal tiver um valor diferente de zero na origem, saber-se-á que o valor médio do sinal é diferente de zero.



Fernando Soares

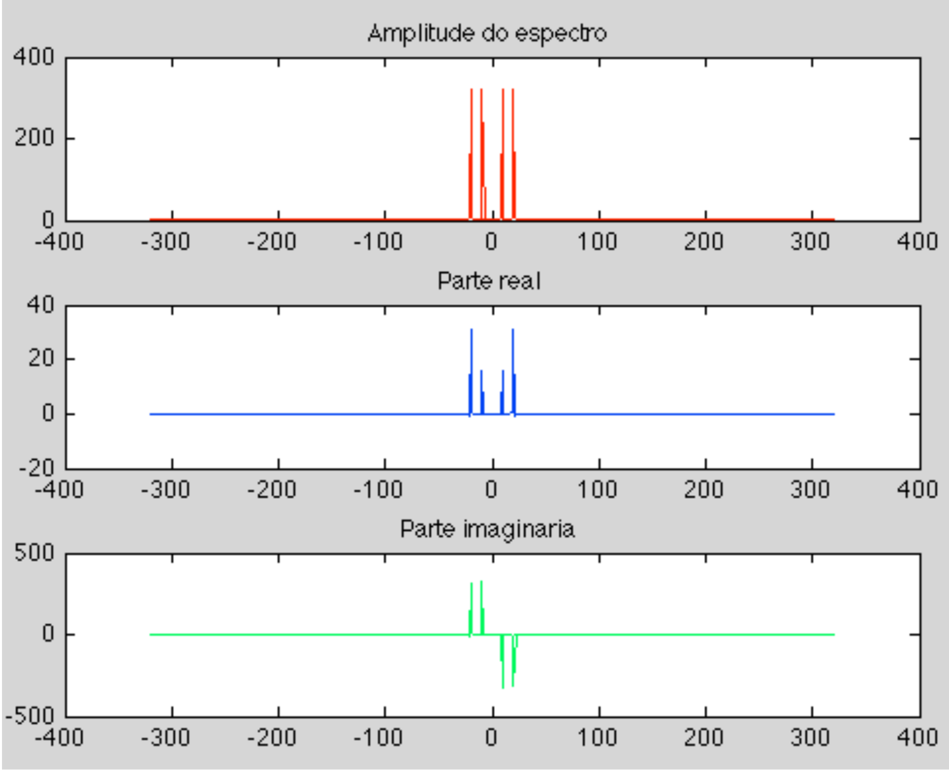
Espectro de frequências

Considere-se um terceiro exemplo, como a soma de duas funções seno, em que a segunda tem uma frequência dupla da primeira: $f(x) = \sin(kx)+\sin(2kx)$. O sinal tem a seguinte forma:



Espectro de frequências

Como há duas funções seno com duas frequências diferentes, pode-se esperar dois picos no lado positivo do espectro (e dois no lado negativo).

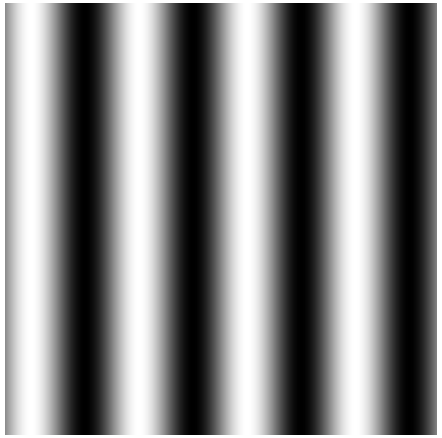


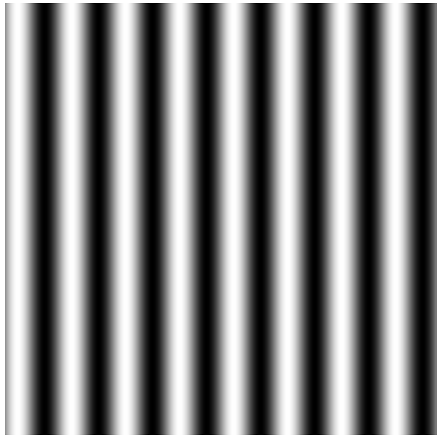
Fernando Soares

Transformada de Fourier 2D

Num sinal 2D (uma imagem) as variações sinusoidais são representadas pelas variações dos tons de cinzento dos pixels, ao longo da imagem.

A frequência espacial corresponde à frequência ao longo do espaço onde há modulação da intensidade (no caso das imagens abaixo, ao longo do eixo dos *xx*). A imagem da esquerda tem uma menor frequência espacial do que a da direita.





Fernando Soares

Transformada de Fourier 2D

A transformação do domínio espacial para o domínio das frequências espaciais resulta numa função de valores complexos, ou seja, do tipo *z = a+bj*.

$$F(u) = re\big(F(u)\big) + im\big(F(u)\big)\, j$$

re: parte real do número complexo
im: parte imaginária do número complexo

$$\text{Magnitude} = |F(u)| = \sqrt{(re(F(u)))^2 + (im(F(u)))^2}$$

$$fase = atan\left(\frac{im(F(u))}{re(F(u))}\right)$$

A visualização do espectro pode fazer-se com a determinação da função da Magnitude.

Fernando Soares

Transformada de Fourier 2D

Transformada Discreta de Fourier (2D): Para uma imagem de dimensões *M*×*N*, a Transformada Directa Discreta de Fourier bidimensional é dada por:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[f(x,y) \times e^{-j2\pi\left(\frac{u\times x}{M} + \frac{v\times y}{N}\right)} \right]$$

A função f(*x*,*y*) é a imagem no domínio espacial e o termo exponencial é a função-base que corresponde à representação de cada ponto *F*(*u*,*v*) do espaço de Fourier.

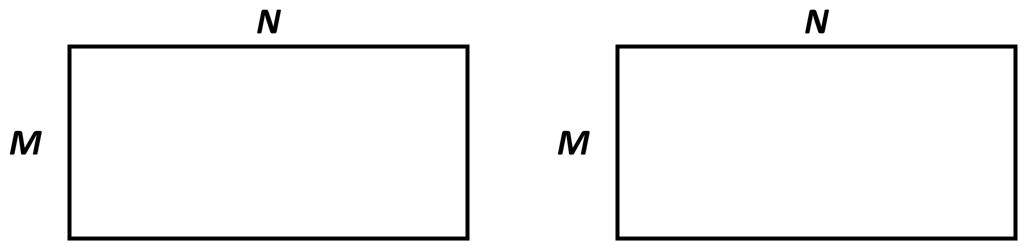
A magnitude do espectro calcula-se com a seguinte expressão:

$$Mag(u,v) = \frac{1}{(N\times M)} |F(u,v)|$$

Transformada de Fourier 2D

A Transformada Directa Discreta de Fourier (DDFT) corresponde à TF amostrada e, como tal, não contém todas as frequências que formam uma imagem, mas apenas um conjunto de amostras que é suficientemente grande para descrever o domínio espacial da imagem.

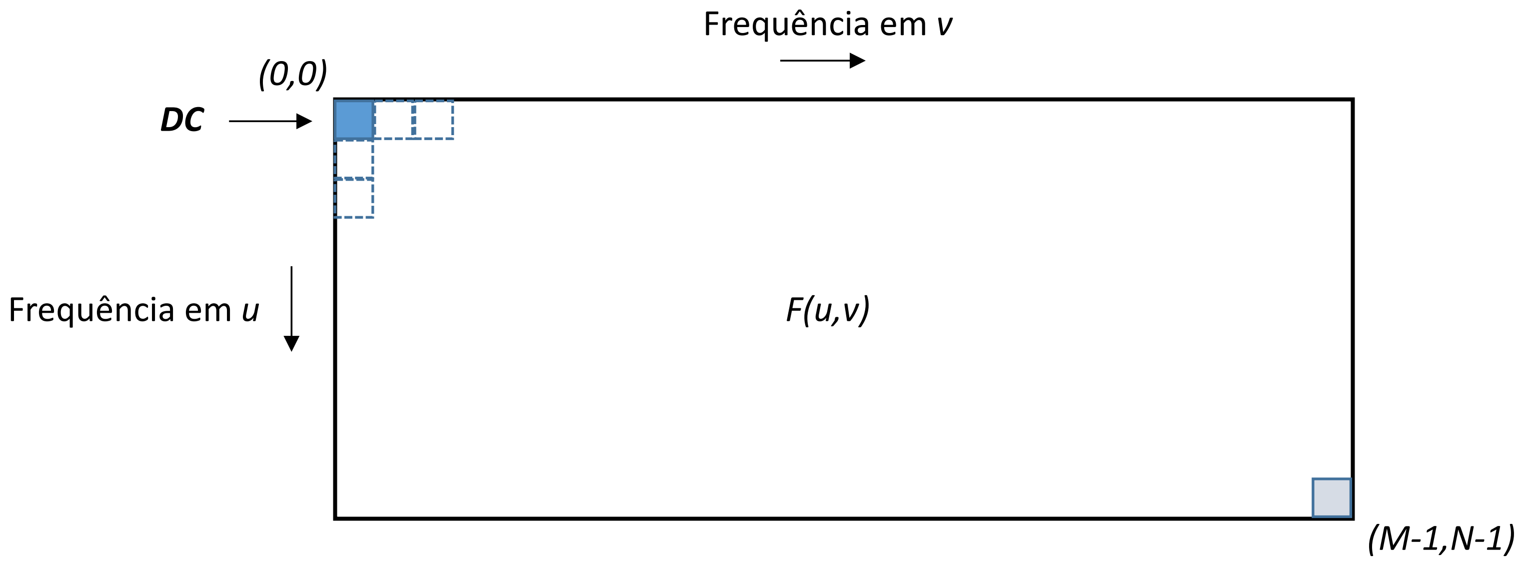
O número de frequências corresponde ao número de pixels da imagem do domínio espacial $f(x,y)$, ou seja, a imagem e o espectro têm as mesmas dimensões.

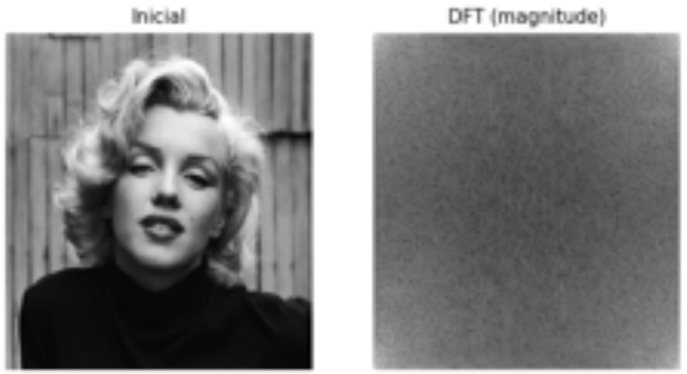


$f(x,y)$ $F(u,v)$

Transformada de Fourier 2D

As funções de base são ondas seno e co-seno com frequências progressivas, isto, é, $F(0,\ 0)$ representa a componente DC da imagem (que tem frequência zero), correspondente à intensidade média, e $F(M\text{-}1,\ N\text{-}1)$ representa a frequência mais elevada em xx e em yy.





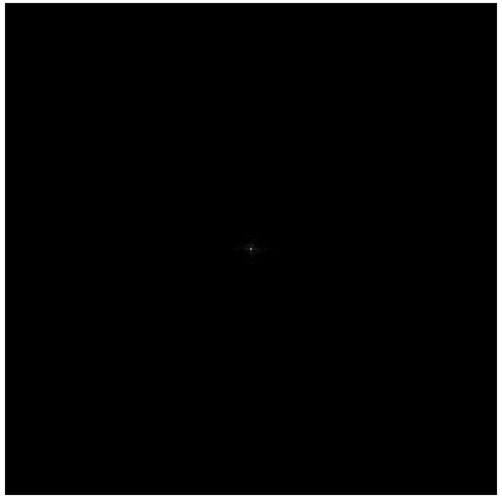
Fernando Soares

Transformada de Fourier 2D

Quase sempre o valor de DC é, de longe, a maior componente do espectro de frequências. O intervalo numérico dos valores do espectro é bastante grande para ser visualizado no ecran, o que faz com que a sua representação não seja frequentemente viável.

Imagem inicial

Magnitude do espectro



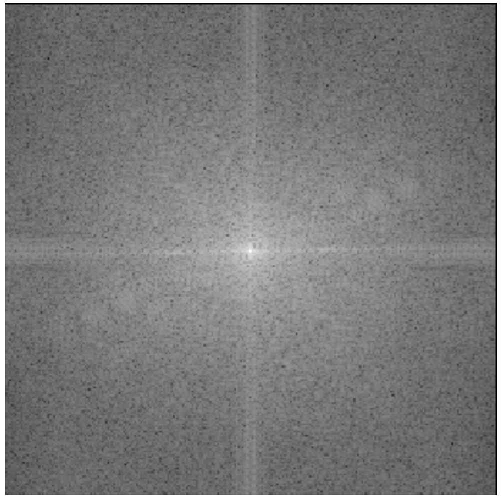
Min = 1.4514; Max = 6955093

Transformada de Fourier 2D

Aplicando a operador logarítmico, à função da Magnitude, para uma representação de 8 bits, obtém-se uma representação apropriada do espectro das frequências (como alternativa pode-se, por vezes, dividir a matriz da magnitude pelo número total de pixels).

Imagem inicial

Magnitude do espectro

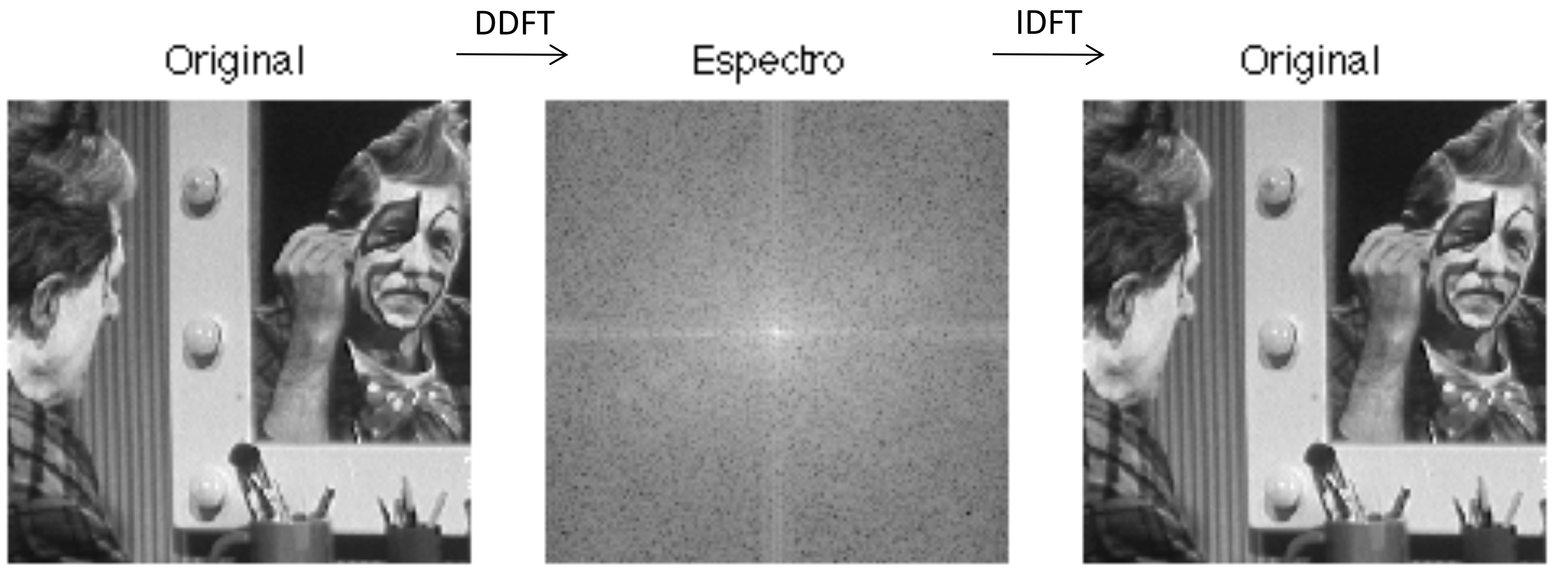


Min = 0; Max = 255

Transformada de Fourier 2D

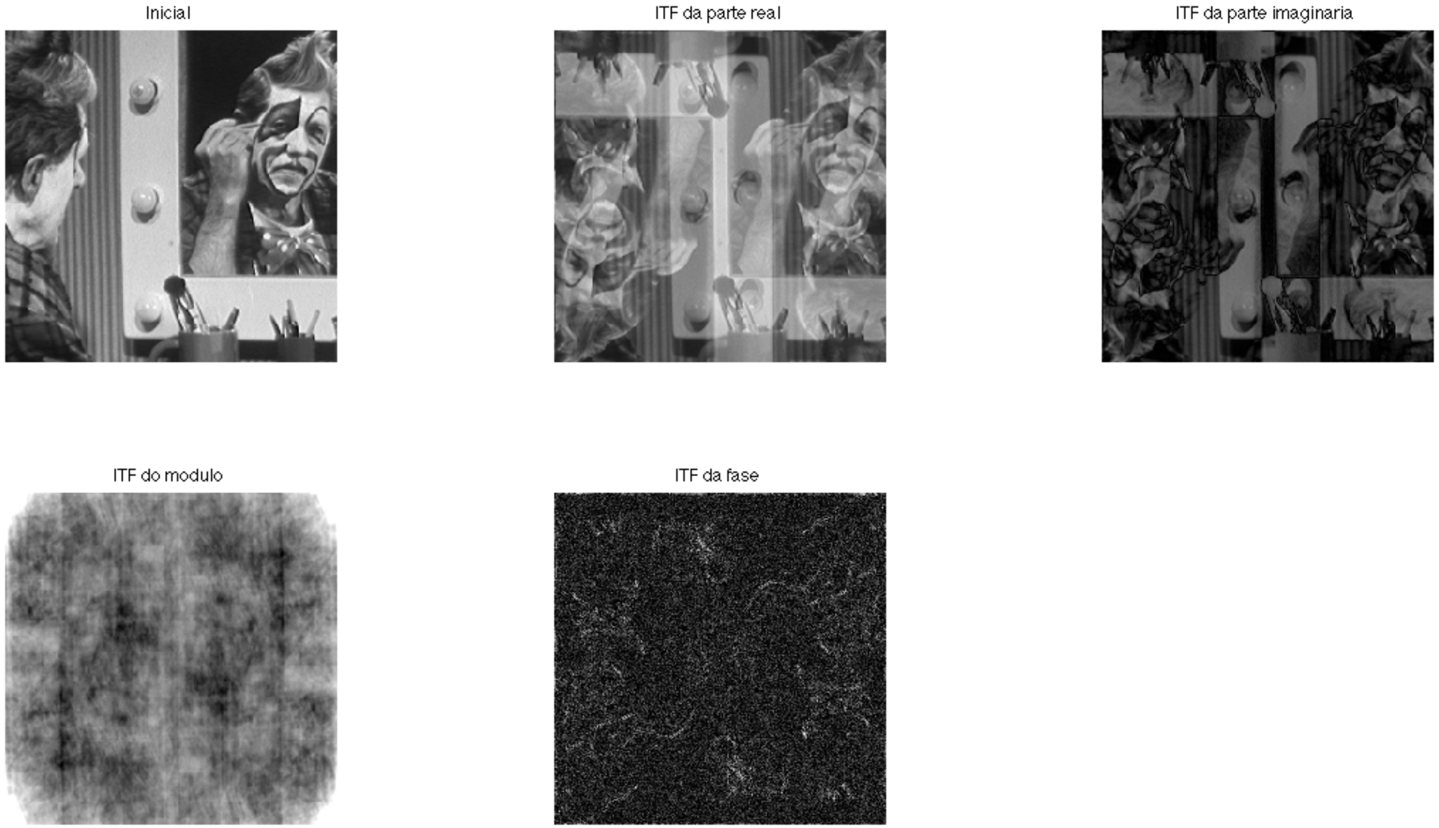
A Transformada Inversa Discreta de Fourier (IDFT) bidimensional é dada por:

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{M \times N}\right) \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \left[F(u, v) \times e^{j2\pi\left(\frac{u \times x}{M} + \frac{v \times y}{N}\right)} \right]$$



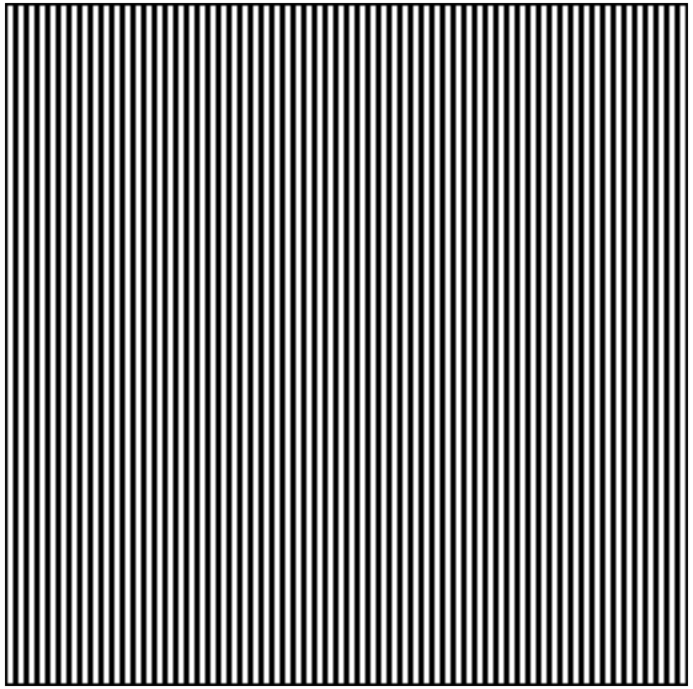
Transformada de Fourier 2D

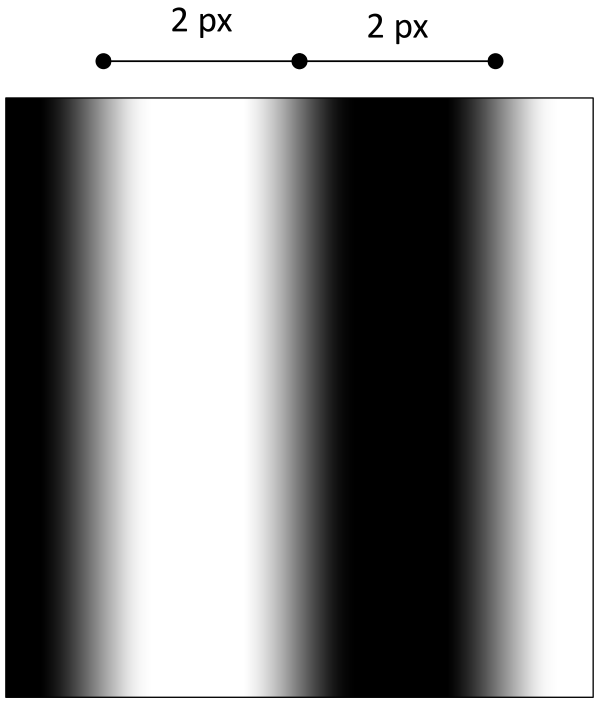
A IDFT necessita em geral das partes real e imaginária obtidas com a DDFT.



Transformada de Fourier 2D

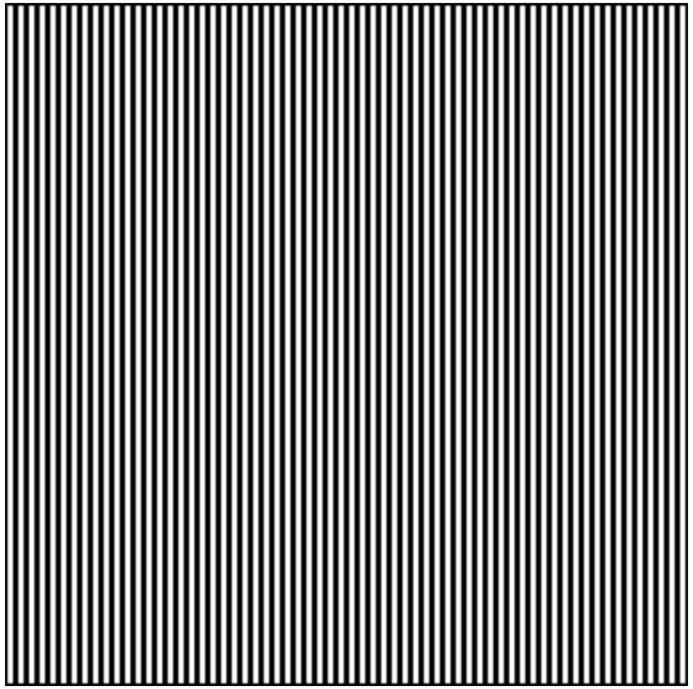
Como **exemplo** considere-se a imagem abaixo, em que cada faixa vertical (branca ou preta) tem uma espessura de 2 pixels.

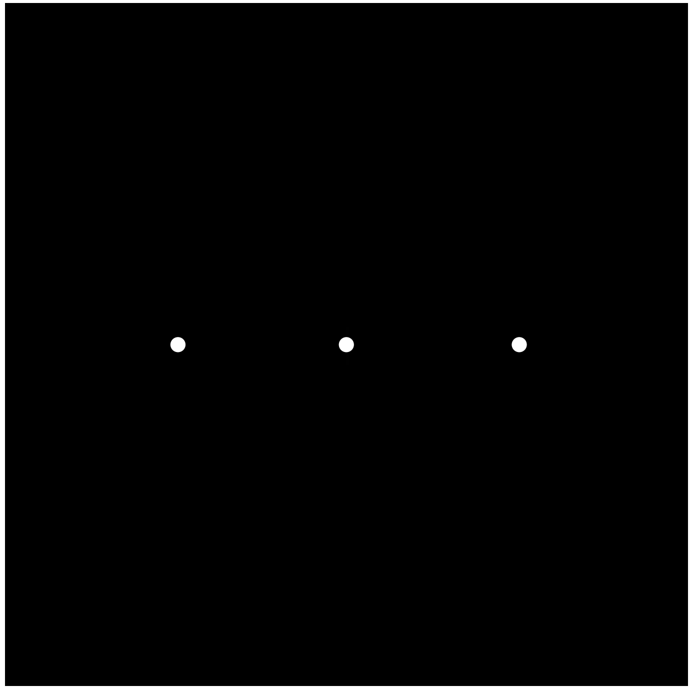




Transformada de Fourier 2D

A transformada de Fourier resulta no espectro da direita que tem três frequências: o valor de DC e, como o espectro é simétrico em relação ao centro, os dois pontos correspondentes à frequência das linhas na imagem original.





Fernando Soares

Transformada de Fourier 2D

Como, no domínio espacial, a função se altera segundo a direcção horizontal, os pontos do espectro apresentam-se alinhados ao longo de uma recta horizontal que passa pelo centro.

No espectro, a distância dos pontos ao centro pode ser explicada da seguinte forma: a frequência máxima (k_{max}), que pode ser representada na imagem original, corresponde a 2 pixels de distância (um preto e um branco):

$$k_{\max} = \frac{1}{2}$$

Ciências ULisboa

Transformada de Fourier 2D

Sendo o sinal constituído por faixas verticais com espessura de 2 pixels (ciclo de 4 pixels) tem-se:

$$k = \frac{1}{4} = \frac{k_{\max}}{2}$$

Portanto, os pontos do espectro situam-se a meio caminho entre o centro e os limites da imagem, ou seja, a frequência representada é igual a metade da frequência máxima.

Filtragem no domínio das frequências

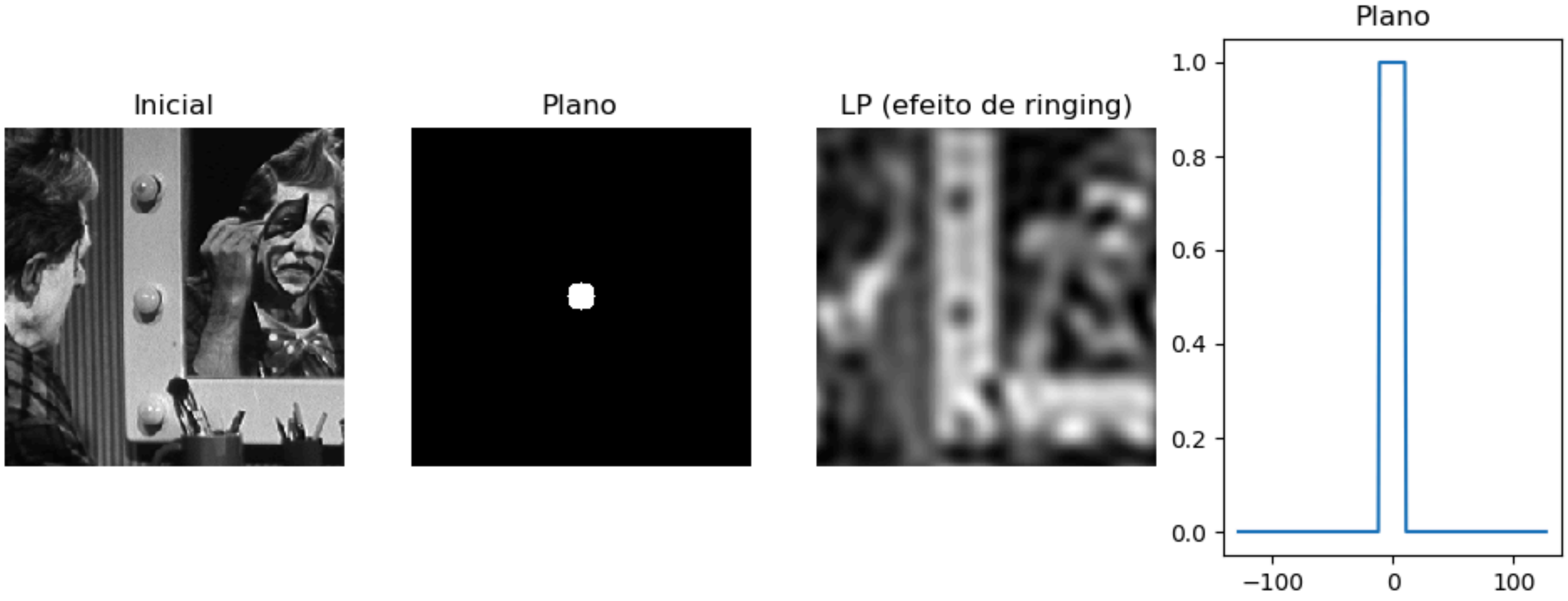
A TF está directamente relacionada com muitas operações, entre as quais as operações de filtragem.

Uma operação de filtragem, que no domínio espacial resulta de uma operação de convolução entre um filtro (kernel) e a imagem de cinzentos, executa-se com uma simples multiplicação no domínio das frequências (TF da imagem inicial).

Assim podem-se definir filtros passa-baixa, passa-alta e passa banda, eliminando por exemplo frequências do espectro.

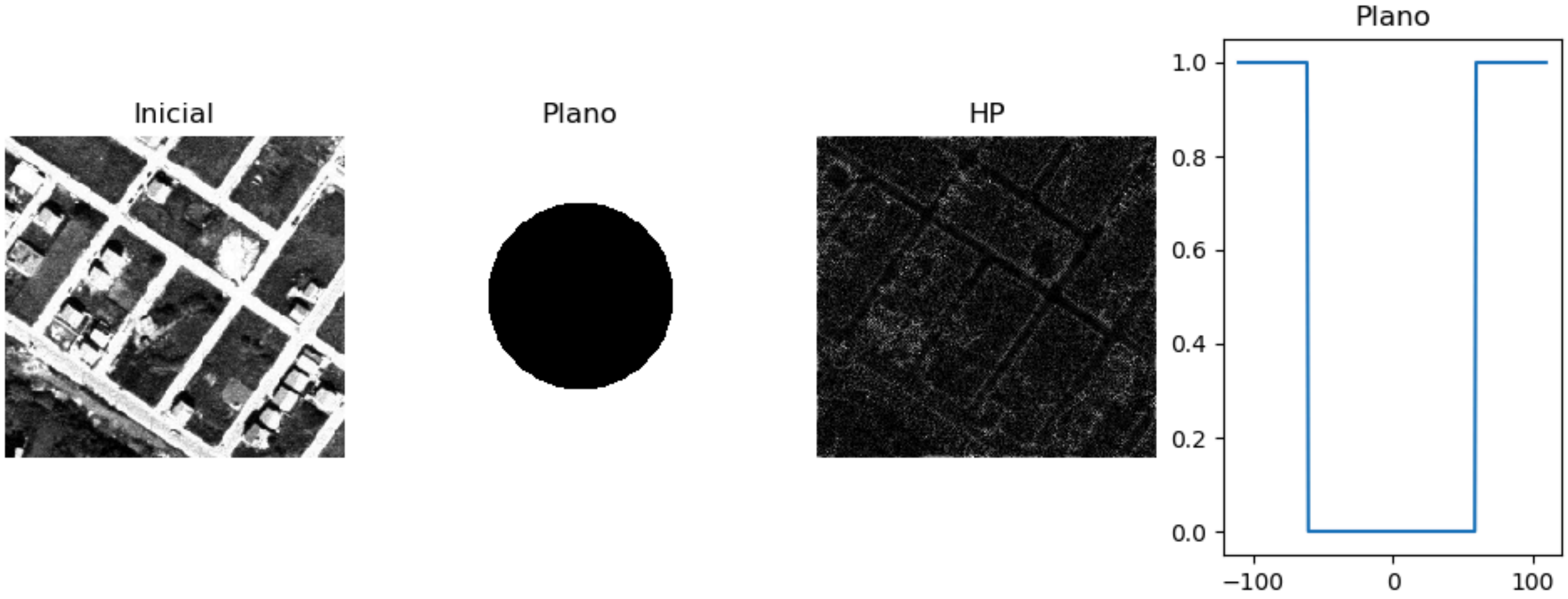
Filtragem no domínio das frequências

Filtro passa-baixa plano:



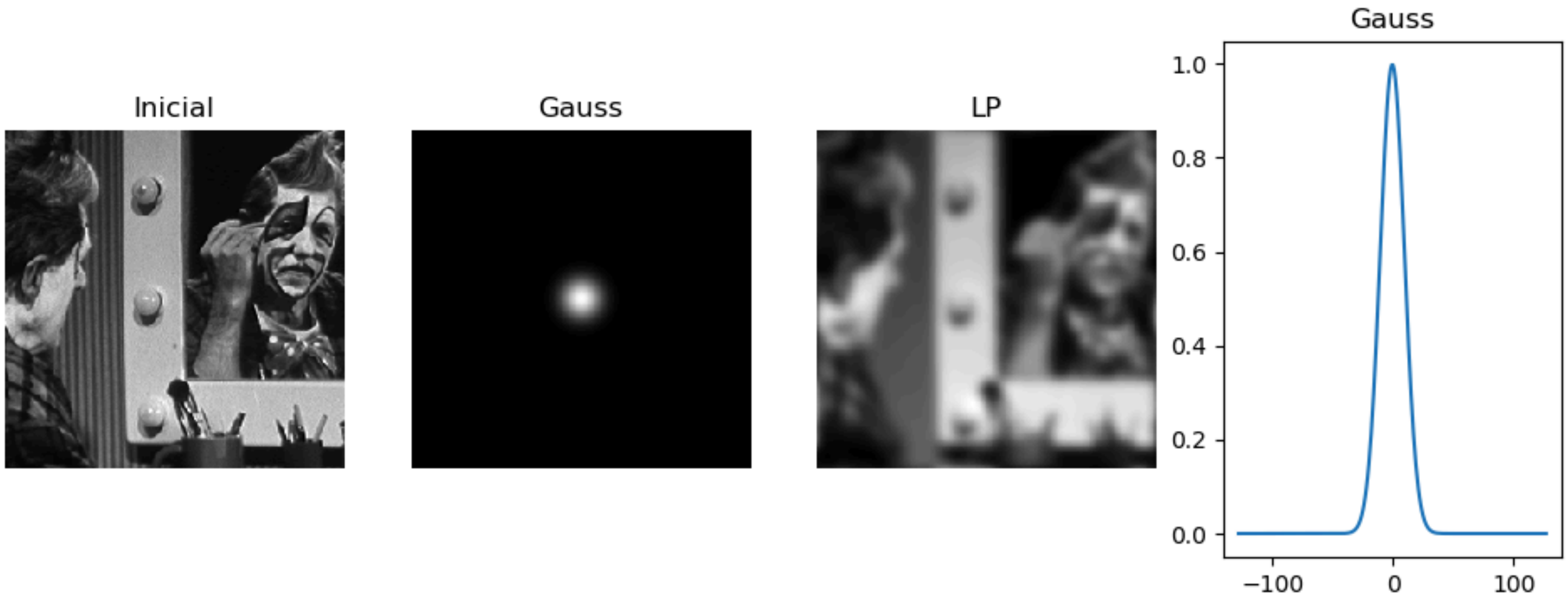
Filtragem no domínio das frequências

Filtro passa-alta plano:



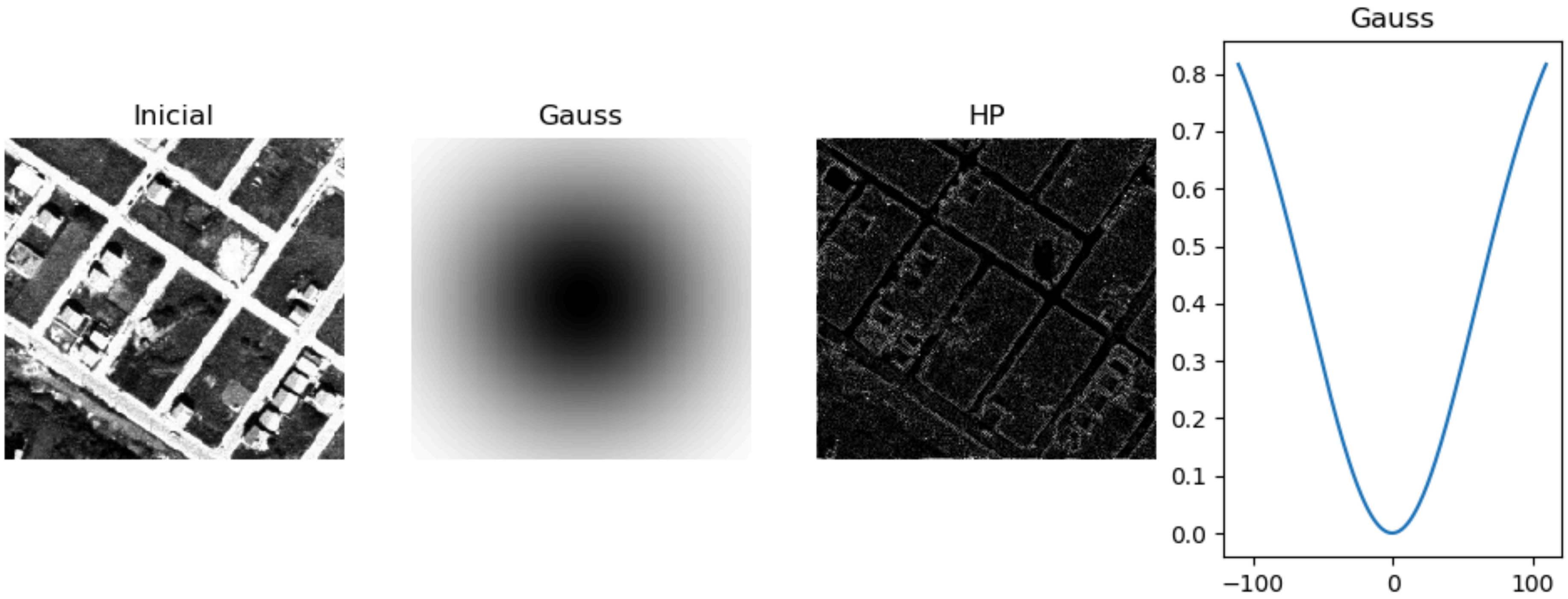
Filtragem no domínio das frequências

Filtro passa-baixa gaussiano:



Filtragem no domínio das frequências

Filtro passa-alta (gaussiano):



Fernando Soares

Filtragem no domínio das frequências

O filtro **Butterworth** de ordem n e frequência de corte D0 é definido como:

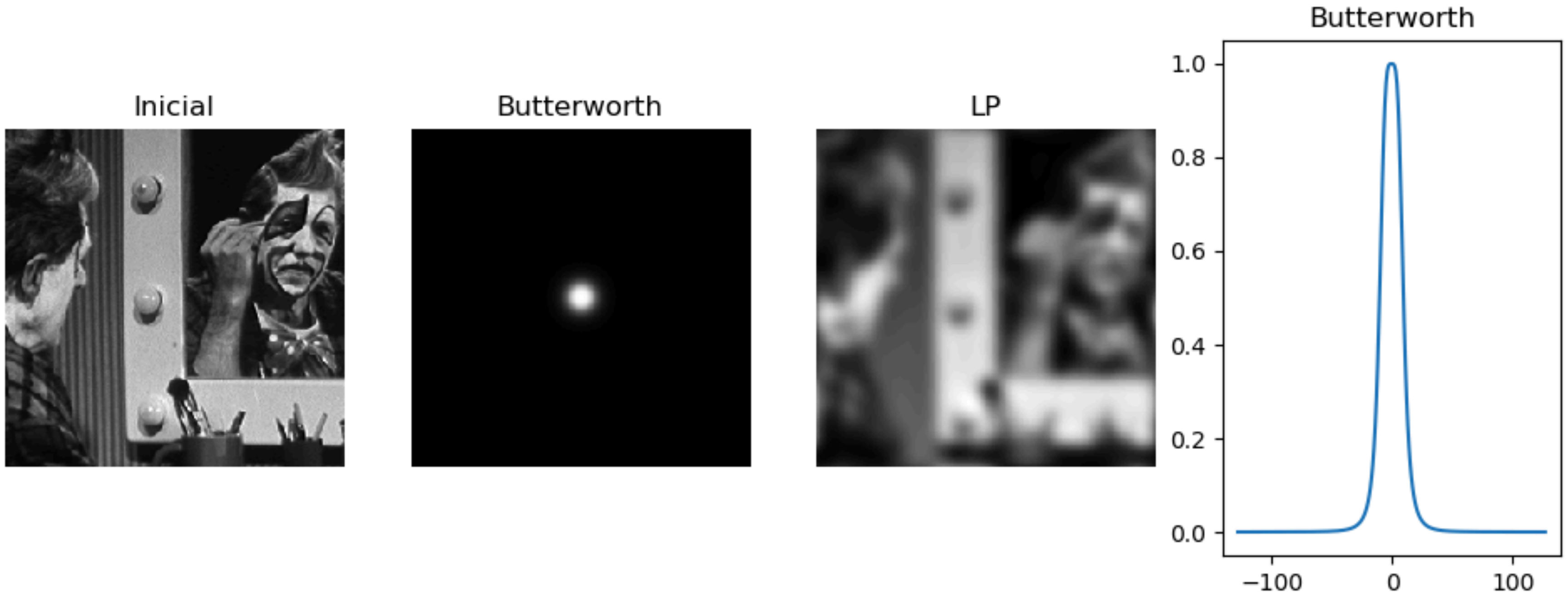
$$B(u,v) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{D0}\right)^{2n}\right]}$$

Este filtro tem a vantagem de se poder controlar a nitidez com a ordem (n).

Um filtro passa-baixo Butterworth mantém frequências dentro do raio D0 e descarta as de fora. Introduz ainda uma transição gradual de 1 para 0 para reduzir o efeito de *ringing* que se verifica com o filtro plano.

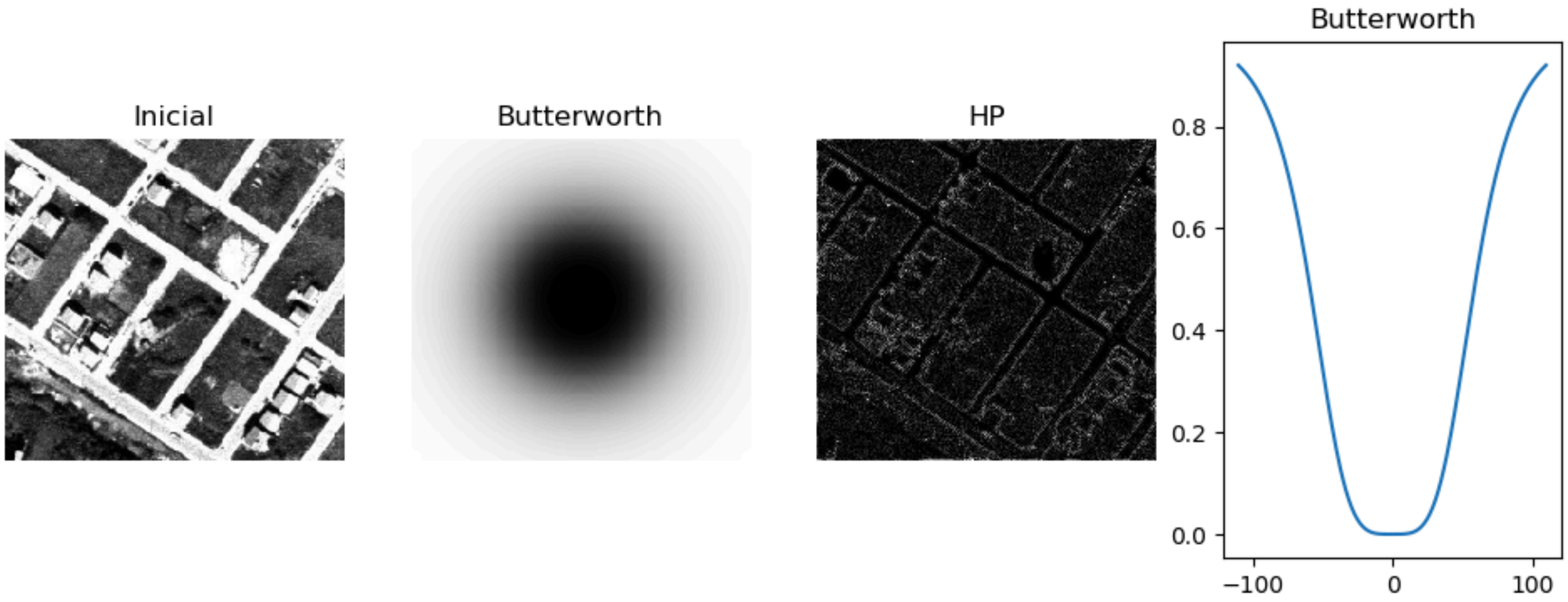
Filtragem no domínio das frequências

Filtro passa-baixa Butterworth



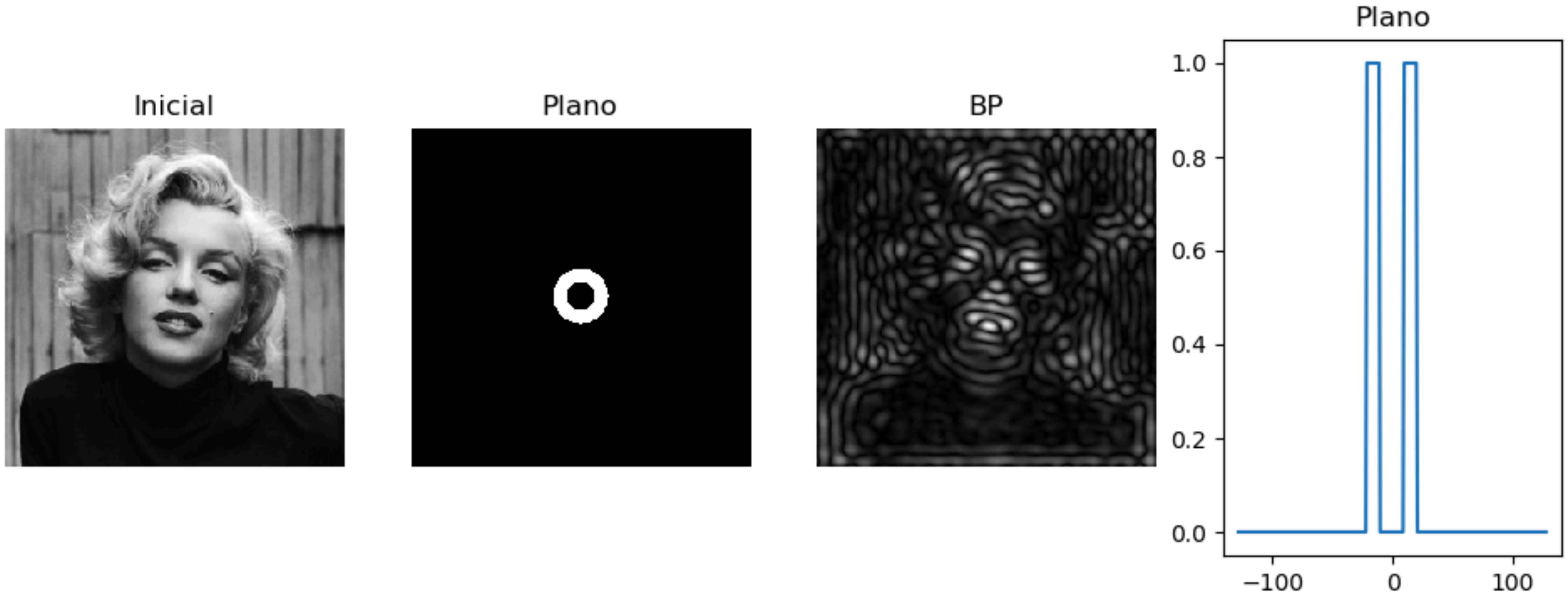
Filtragem no domínio das frequências

Filtro passa-alta Butterworth



Filtragem no domínio das frequências

Filtro passa-banda plano:



Ciências ULisboa

Teorema da convolução

Em matemática, o **teorema da convolução** afirma que, em condições adequadas, a TF de uma convolução de dois sinais obtém-se multiplicando as suas transformadas individuais de *Fourier* e executando a inversa da TF desse produto

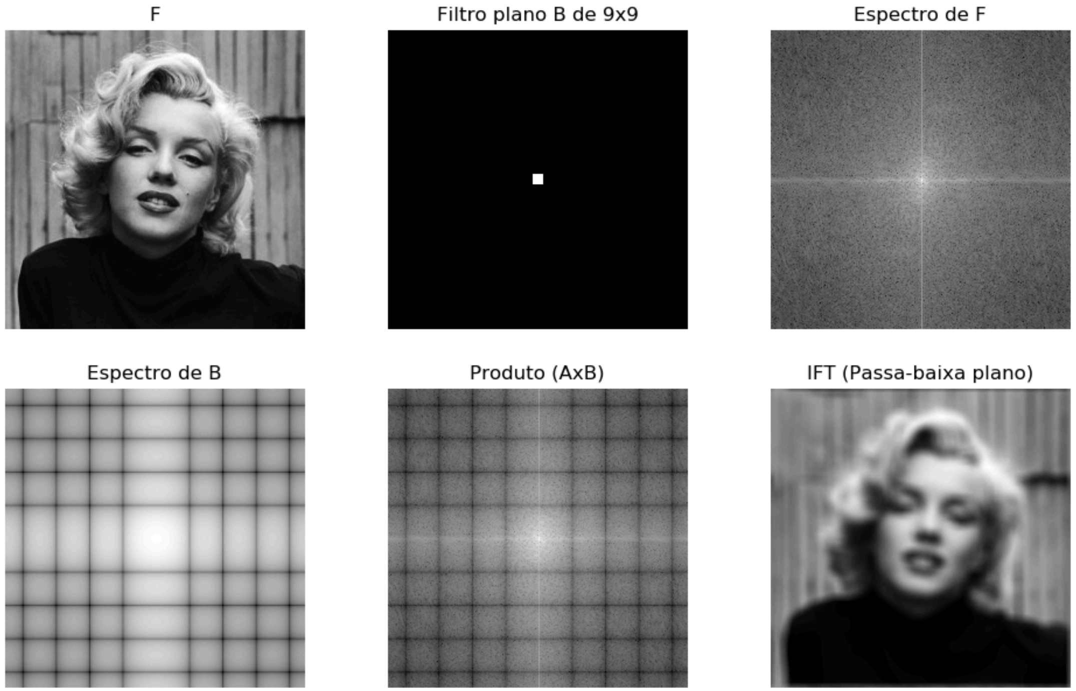
$$f(x,y) * h(x,y) = idft(F(u,v) \times H(u,v))$$

Este teorema é importante porque estabelece a ligação entre operações no domínio das frequências e a acção de filtros espaciais lineares.

As operações de filtragem linear, feitas por convolução no domínio espacial, podem ser realizadas por multiplicações simples no domínio de Fourier, tornando mais rápido o processo filtragem.

Teorema da convolução

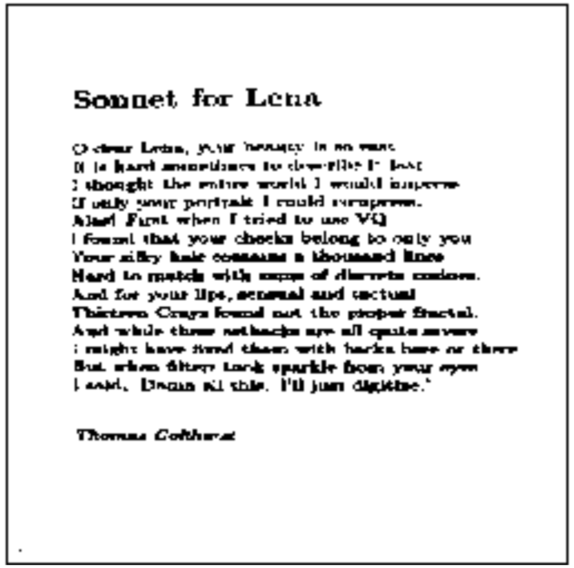
Para tal, basta multiplicar a matriz do filtro pretendido pela imagem resultante da DFT (espectro com ambas as partes real e imaginária) e aplicar de seguida a IFT. Na figura pode-se ver a ilustração do processo de filtragem de uma imagem, por um filtro rectangular da média aritmética.



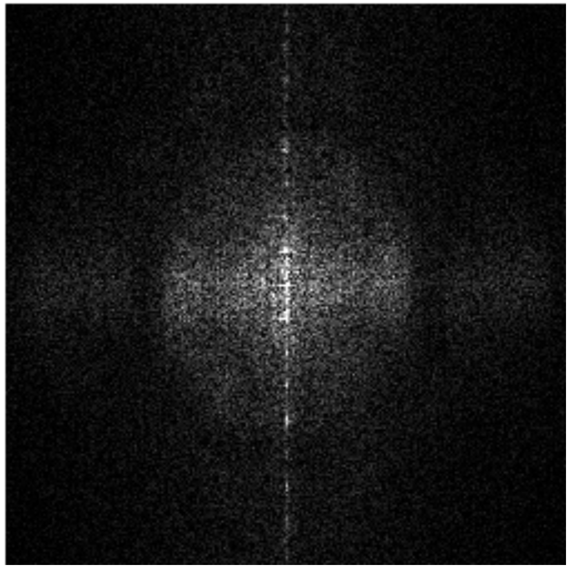
Exemplos de aplicação

Detecção de orientação de texto: A TF é usada para adquirir informação acerca da estrutura geométrica do domínio espacial de uma imagem. O reconhecimento de texto, usando técnicas de processamento de imagem fica simplificado se for assumido que as linhas de um dado texto estão dispostas numa dada direção.

Original



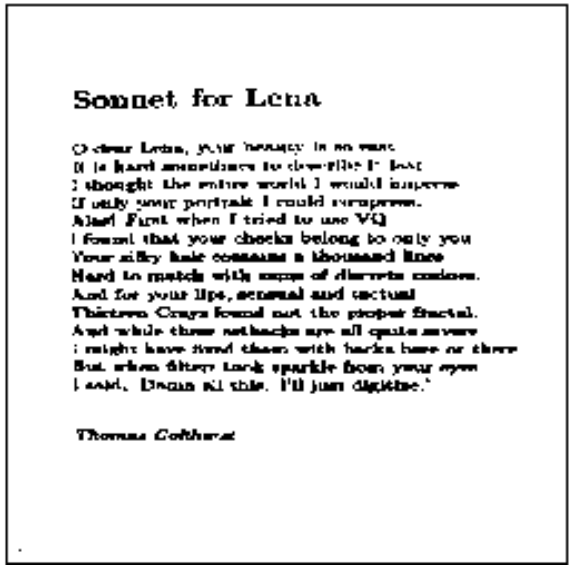
Espectro linxcol



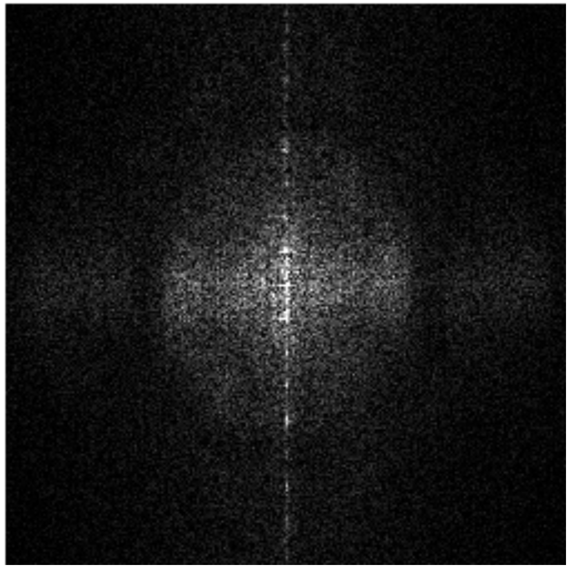
Exemplos de aplicação

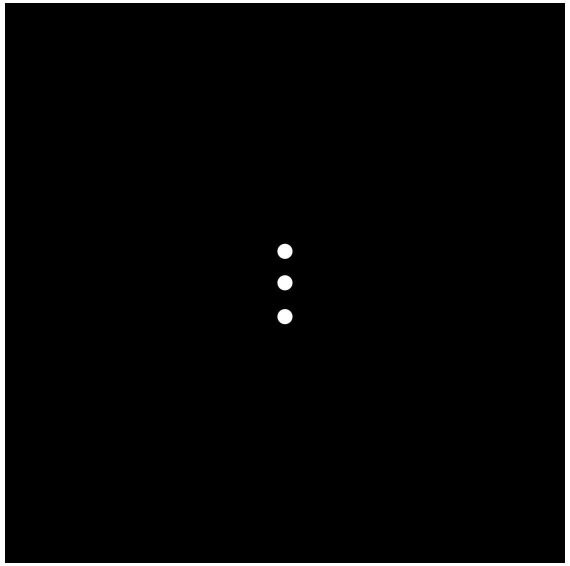
A limiarização dos picos da imagem do espectro permite identificar a orientação da disposição das linhas de texto.

Original



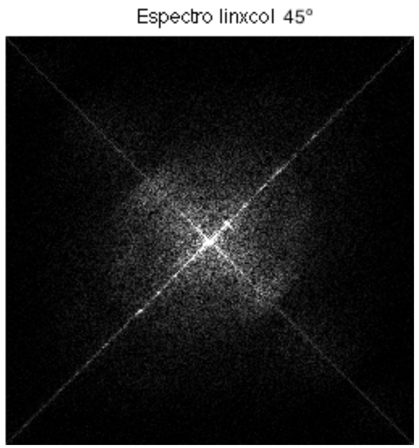
Espectro linxcol

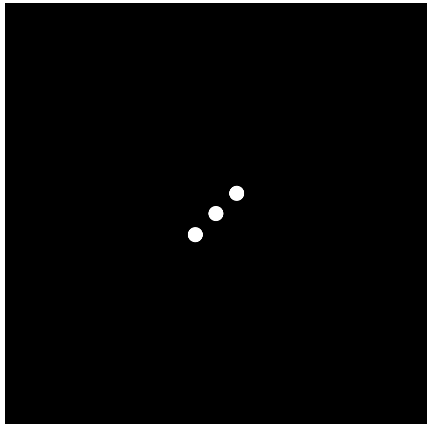




Exemplos de aplicação

No caso de uma imagem rodada de 45º, após a identificação dos picos de frequência sobre a linha principal, a imagem pode ser rodada usando para tal o conhecimento do ângulo que se obtém nesse procedimento.





A linha perpendicular à linha principal resulta da existência de cantos escuros na imagem rodada.

Exemplos de aplicação

A Transformada de Fourier pode ser usada para executar operações de localizar objectos numa imagem, por determinação do espectro de potência cruzada (que se verá no tema de segmentação de imagem).

Template

F

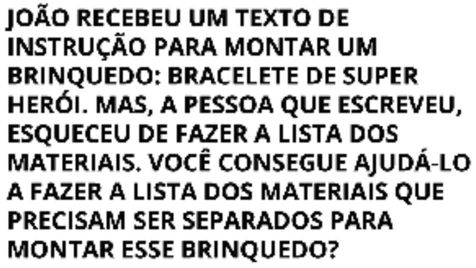
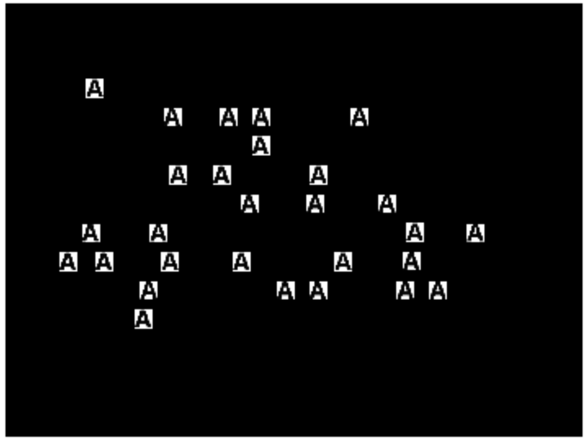


Imagem inicial

Resultado



Posições
(máximos da correlação)